

Corrigé du DS 8

Exercice 1 : (5 points)

1. Déterminer la probabilité de E_1 , notée $P(E_1)$, et les probabilités conditionnelles :

$$P_{E_1}(E_2) \text{ et } P_{\bar{E}_1}(E_2).$$

Les jetons sont indiscernables au toucher et l'expérience est soumise au hasard. Donc les issues sont équiprobables. Aussi, soit Ω l'univers des possibles et A un événement, $P(A) = \frac{\text{card}A}{\text{card}\Omega}$.

Il y a 1 boule blanche et 2 boules noires dans le sac 1. Donc $p(E_1) = \frac{1}{3}$.

On sait qu'un jeton blanc est tiré ; on met alors ce jeton blanc dans le sac 2, il y donc 2 jetons blancs pour un jeton noir : $P_{E_1}(E_2) = \frac{2}{3}$.

On sait qu'un jeton noir est tiré ; on met alors ce jeton noir dans le sac 2, il y donc 1 jetons blancs pour deux jeton blanc : $P_{\bar{E}_1}(E_2) = \frac{1}{3}$.

En déduire la probabilité de E_2 , notée $P(E_2)$.

L'événement E_2 peut être obtenu soit :

- En ayant tiré un jeton blanc dans le premier sac ;
- En ayant tiré un jeton noir dans le premier sac.

C'est à dire : $E_2 = (E_1 \cap E_2) \cup (\bar{E}_1 \cap E_2)$.

Or E_1 et \bar{E}_1 sont contraires donc $(E_1 \cap E_2)$ et $(\bar{E}_1 \cap E_2)$ partitionnent E_2 .

Donc $P(E_2) = P(E_1 \cap E_2) + P(\bar{E}_1 \cap E_2) = P_{E_1}(E_2) \times P(E_1) + P_{\bar{E}_1}(E_2) \times P(\bar{E}_1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{3}$

$$P(E_2) = \frac{4}{9}$$

2. Pour tout entier naturel k tel que $1 \leq k \leq n$, la probabilité de E_k est noté P_k .

Justifier la relation de récurrence suivante :

$$P_{k+1} = \frac{1}{3}P_k + \frac{1}{3}$$

Soit k un entier naturel compris entre 1 et n .

L'événement E_{k+1} peut être obtenu soit :

- En ayant tiré un jeton blanc dans le sac k ;
- En ayant tiré un jeton noir dans le sac k .

C'est à dire : $E_{k+1} = (E_k \cap E_{k+1}) \cup (\bar{E}_k \cap E_{k+1})$.

Or E_k et \bar{E}_k sont contraires donc $(E_k \cap E_{k+1})$ et $(\bar{E}_k \cap E_{k+1})$ partitionnent E_{k+1} .

Donc $P(E_{k+1}) = P(E_k \cap E_{k+1}) + P(\bar{E}_k \cap E_{k+1}) = P_{E_k}(E_{k+1}) \times P(E_k) + P_{\bar{E}_k}(E_{k+1}) \times P(\bar{E}_k)$

$$P(E_{k+1}) = \frac{2}{3}P_k + \frac{1}{3}(1 - P_k) = \frac{1}{3}P_k + \frac{1}{3}$$

Aussi, $P_{k+1} = \frac{1}{3}P_k + \frac{1}{3}$

3. On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et pour tout entier $k \geq 1 : u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}$.

a) On considère la suite (v_k) définie par, pour tout entier $k \geq 1, v_k = u_k - \frac{1}{2}$.

Démontrer que (v_k) est une suite géométrique.

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 1.

$$v_{k+1} = u_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_k - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}\left(u_k - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{3}v_k.$$

(v_k) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de terme initial $v_1 = -\frac{1}{6}$.

$$\text{Pour tout } k \geq 1, v_k = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

b) En déduire l'expression de u_k en fonction de k . Montrer que la suite (u_k) est convergente et préciser sa limite.

$$\text{Il vient alors que } u_k = -\frac{1}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2}.$$

On démontre que la suite (u_k) est croissante et majorée par $\frac{1}{2}$. Toute suite majorée croissante est convergente.

$$-1 < \frac{1}{3} < 1 \text{ donc } \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0. \text{ Par somme, } \lim_{k \rightarrow +\infty} u_k = \frac{1}{2}.$$

4. Dans cette question, on suppose que $n = 10$.

Déterminer pour quelles valeurs de k , on a : $0,4999 \leq P_k \leq 0,5$.

On associe la probabilité P_k à la suite (u_k) .

$$0,4999 \leq P_k < 0,5 \Leftrightarrow 0,4999 \leq u_k < 0,5 \Leftrightarrow 0,4999 \leq -\frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3}\right)^k + \frac{1}{2} < 0,5$$

$$\Leftrightarrow 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^k \leq 0,0002 \Leftrightarrow k \ln\left(\frac{1}{3}\right) \leq \ln 0,0002, \text{ la fonction } x \mapsto \ln x \text{ réalise une bijection de } \mathbb{R}_+^* \text{ vers } \mathbb{R}_+$$

$$\Leftrightarrow -k \ln 3 \leq \ln \frac{2}{10000} \Leftrightarrow k \geq \frac{\ln \frac{2}{10000}}{-\ln 3}, \text{ et } 7 < \frac{\ln \frac{2}{10000}}{-\ln 3} < 8.$$

$$\text{Pour } k \in \{8; 9; 10\}, 0,4999 \leq P_k < 0,5.$$

Exercice 2 : (5 points)

Partie A

Question de cours :

Démontrer que la distance d'un point $A(x_A, y_A, z_A)$ au plan P d'équation cartésienne

$$ax + by + cz + d = 0, a, b, c \text{ et } d \text{ non tous nuls est } d(A, P) = \frac{|ax + by + cz + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Soit $H(x, y, z)$ le projeté orthogonal de A sur P . Le vecteur \overline{AH} est donc normal au plan P . Soit \vec{n} un vecteur normal à P , alors $\vec{n}(a, b, c)$ et \vec{n} et \overline{AH} sont colinéaires.

$\overline{AH} \cdot \vec{n} = AH \times \|\vec{n}\|$ si \overline{AH} et \vec{n} sont de même sens et $\overline{AH} \cdot \vec{n} = -AH \times \|\vec{n}\|$ si \overline{AH} et \vec{n} sont de sens contraire. Donc $|\overline{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\|$

Le repère étant orthonormal, $\overline{AH} \cdot \vec{n} = ax - ax_A + by - by_A + cz - cz_A$. Comme H appartient au plan P , $ax + by + cz = -d$. Donc $\overline{AH} \cdot \vec{n} = -ax_A - by_A - cz_A - d$.

$$|\overline{AH} \cdot \vec{n}| = AH \times \|\vec{n}\| \Leftrightarrow |ax_A + by_A + cz_A + d| = AH \times \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \Leftrightarrow AH = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad \blacklozenge$$

Partie B

On considère un cube ABCDEFGH d'arête 1.

1. a. Exprimer plus simplement le vecteur $\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE}$.

$$\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CG} = \overline{AG}$$

b. En déduire que $\overline{AG} \cdot \overline{BD} = 0$, $\overline{AG} \cdot \overline{BE} = 0$ puis que la droite (AG) est orthogonale au plan (BDE).

$$\begin{aligned} \overline{AG} \cdot \overline{BD} &= (\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE}) \cdot \overline{BD} = (\overline{AB} + \overline{AD}) \cdot \overline{BD} + \overline{AE} \cdot \overline{BD} \\ &= \overline{AC} \cdot \overline{BD} + \overline{AE} \cdot \overline{BD} \end{aligned}$$

Or ABCD est un carré donc (AC) et (BD) sont perpendiculaires donc $\overline{AC} \cdot \overline{BD} = 0$.

Et (AE) est perpendiculaire au plan ABC donc $\overline{AE} \cdot \overline{BD} = 0$.

Il vient que $\overline{AG} \cdot \overline{BD} = 0$.

$$\text{De même, } \overline{AG} \cdot \overline{BE} = (\overline{AB} + \overline{AD} + \overline{AE}) \cdot \overline{BE} = (\overline{AB} + \overline{AE}) \cdot \overline{BE} + \overline{AD} \cdot \overline{BE} = \overline{AF} \cdot \overline{BE} + \overline{AD} \cdot \overline{BE}$$

Or ABFE est un carré donc (AF) et (BE) sont perpendiculaires donc $\overline{AF} \cdot \overline{BE} = 0$.

Et (AD) est perpendiculaire au plan ABF donc $\overline{AD} \cdot \overline{BE} = 0$.

Il vient que $\overline{AG} \cdot \overline{BE} = 0$.

Les droites (BE) et (BD) sont sécantes en B.

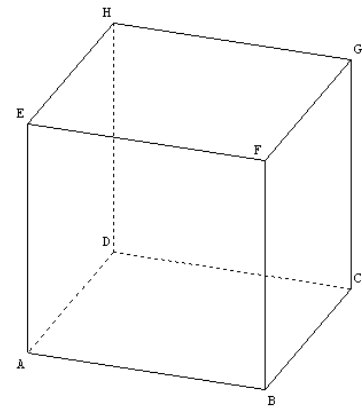
$\overline{AG} \cdot \overline{BE} = 0$ signifie que la droites (AG) et la droite (BE) sont perpendiculaires.

$\overline{AG} \cdot \overline{BD} = 0$ signifie que la droites (AG) et la droite (BD) sont perpendiculaires.

Aussi, la droite (AG) est perpendiculaires à deux droites sécantes du plan (BDE).

Donc (AG) est perpendiculaire au plan (BDE).

2. Montrer que le centre de gravité I du triangle BDE est le point d'intersection de (AG) et du plan (BDE) et préciser la position du point I sur (AG).



Le triangle ABE est équilatéral, chaque coté mesurant $\sqrt{2}$. Donc le centre de gravité I est équidistant de B, de D et de E. I est donc l'isobarycentre de B, D et E.

D'après la question 1, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG}$.

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IE} = \overrightarrow{AG} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AG} \text{ donc } \boxed{\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}}.$$

Donc $\boxed{I \text{ appartient à la droite } (AG) \text{ et au plan } (BDE)}$.

3. Calculer la distance du point H au plan (BDE).

De la même façon, on démontre que (AG) est perpendiculaire au plan (CFH).

Donc les plans (CFH) et (BDE) sont parallèles.

On appelle J le centre de gravité du triangle équilatéral CFH, on démontre de même

que $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$. Il vient alors que : $\overrightarrow{GJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{GA}$ et $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}$.

$$\overrightarrow{AG} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{IJ} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{IJ} \text{ donc } \overrightarrow{IJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AG}.$$

Aussi, $\boxed{d(H, (BDE)) = IJ = \frac{\sqrt{3}}{3}}$.

4. Déterminer une équation du plan (BDE) dans un repère bien choisi.

Soit $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$ un repère orthonormal.

On a alors les coordonnées suivantes :

$$A(0,0,0); D(0,1,0); E(0,0,1); B(1,0,0); G(1,1,1).$$

Le vecteur \overrightarrow{AG} est normal au plan (BDE).

Soit M(x, y, z) un point de l'espace,

$$M \in (BDE) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AG} = 0$$

$$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}) \text{ est un repère orthonormal donc } \overrightarrow{BM} \cdot \overrightarrow{AG} = x - 1 + y + z.$$

$$\boxed{\text{Une équation de } (BDE) \text{ est } x + y + z - 1 = 0}.$$

5. Détermine les coordonnées de H puis retrouver le résultat de la question 3.

$$\text{D'après la partie A, } d(H, (BDE)) = \frac{|x_H + y_H + z_H - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}}.$$

$$\text{Or H a pour coordonnées } (0,1,1) \text{ donc } \boxed{d(H, (BDE)) = \frac{|0+1+1-1|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}}$$